

# 小世界 Small World

產業研發碩士專班課程

陳慶瀚

機器智慧與自動化技術(MIAT)實驗室

義守大學電機系

[pierre@isu.edu.tw](mailto:pierre@isu.edu.tw)

2005年11月01日



# 本週主題

1. 小世界現象
2. 三個基本概念
3. 小世界的系統思想



# 小世界現象



## 重要參考文獻

- [1.] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective Dynamics of 'Small-World' Networks, *Nature* 393, 440 (1998).
- [2.] D. J. Watts , *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, (Princeton University Press, Princeton, 1999), Part 1.
- [3.] N. Mathias and V. Gopal, *Small Worlds: How and Why*, *Phys. Rev. E* 63, 21117 (2001).
- [4.] M. Gitterman, *Small-World Phenomena in Physics: The Ising Model*, *J. Phys. A* 33, 8373 (2000).



# 複雜網路

- Internet：由許多路由器和網域所聯結的複雜網路
  - WWW：由許多網站(website)所聯結的複雜網路
  - 大腦：由許多神經元所聯結所聯結的複雜網路
  - 組織：由許多個人所聯結的複雜網路
  - 全球經濟：由許多國家經濟所聯結的複雜網路
  - 國家經濟：由許多市場所聯結的複雜網路
  - 市場：由許多生產者和消費者所聯結的複雜網路
- 
- 傳染病(SARS，禽流感)藉由複雜社會網路而傳染；
  - 電腦病毒藉由Internet網路而傳染；
  - 能源藉由電力輸送網路傳輸；

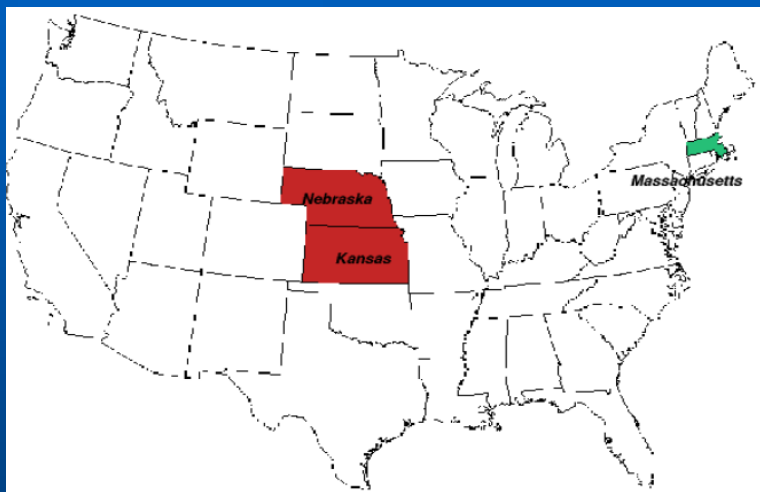


# 小世界現象假說

- 每個人與世界上其他任何一個人都可以透過一個平均6個人的社會人際關係(social acquaintances)產生關聯。
- 此一概念來 1967 年社會心理學家Stanley Milgram的實驗發現：六度分離(six degrees of separation)。



# Milgram 實驗



實驗方法：

找到美國境內任意兩個陌生人之間的最短社會人際鏈結：

- Source person in Nebraska
- Sends message with first name and location
- Target person in Massachusetts

實驗結果：

- 平均鏈結長度： 5 and 6 steps
- 六度分離(Six degrees of separation)



## Milgram實驗所發現的問題

為何再兩個陌生人之間總會存在一條最短的人際關係鏈結(short chains of acquaintances linking)?





# 三個基本概念



## 小世界的三個重要特徵

- 平均路徑長(average path length)
- 叢聚係數(clustering coefficient)
- 級數分布(degree distribution)



# 平均路徑長(average path length)

網路中兩個節點 $i, j$ 的距離  $d_{ij}$  定義為：

$i, j$  間最短連結路徑所經過的edge數目。

網路直徑(diameter)  $D$ 則定義為：

網路中所有兩兩節點的最大距離。

平均路徑長度  $L$  定義為：

網路中所有兩兩節點的平均距離。



# 叢聚係數 (clustering coefficient)

叢聚係數  $C$  :

假設節點  $i$  有  $k_i$  個 edge 連結到  $k_i$  個其他節點。這些節點均為  $i$  的鄰域結點 (neighbors)，且彼此之間最多有  $k_i(k_i - 1)/2$  個。節點  $i$  的叢聚係數  $C_i$  定義為：

$$C_i = 2E_i / (k_i(k_i - 1))$$

$E_i$  是存在於  $k_i$  個節點間的 edges 的總數量；

整個網路的叢聚係數  $C$  :

$$C = \text{average of } C_i \text{ over all } i$$

$C = 1$  : 完全連結網路

$C \sim 1/N$  : 隨機連結網路， $N$  是節點數目

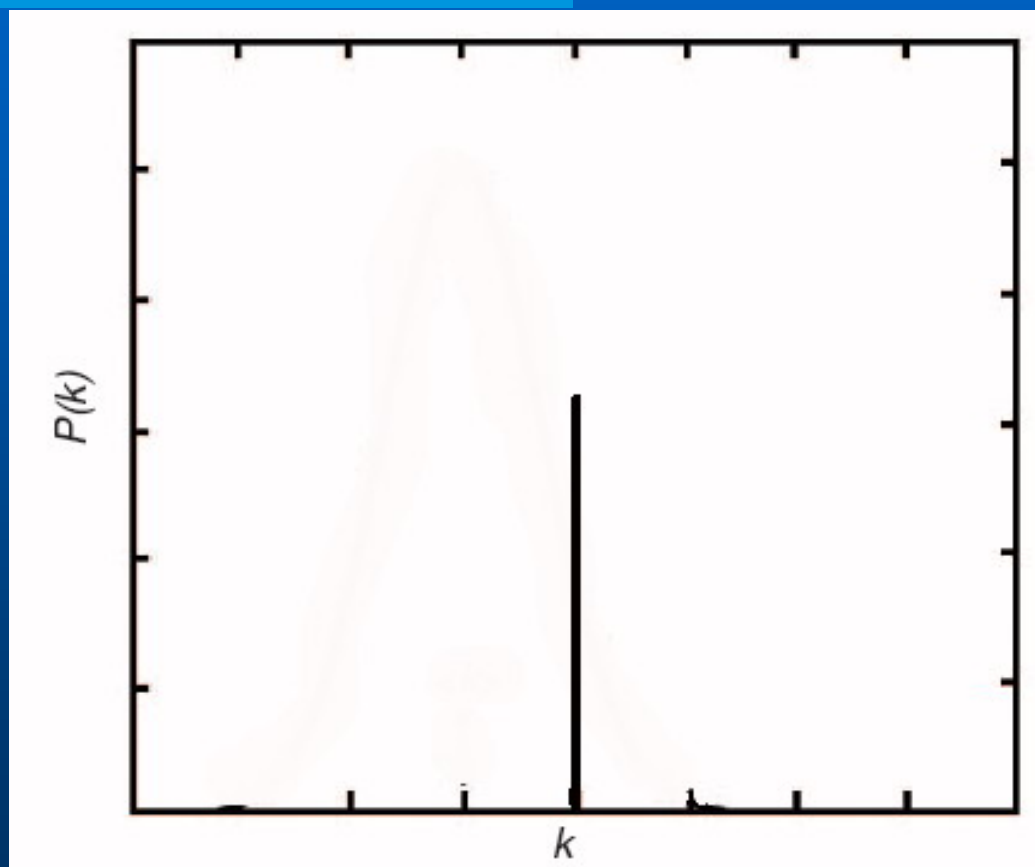


# 階數分布 (degree distribution)

- 節點  $i$  的階數  $k_i$  定義為它的連結數目。
- 網路的平均階數  $\langle k \rangle$  是所有  $k_i$  的平均。
- 階數分布函數  $P(k)$ ：隨機選取一個節點，其階數剛好為  $k$  的機率。



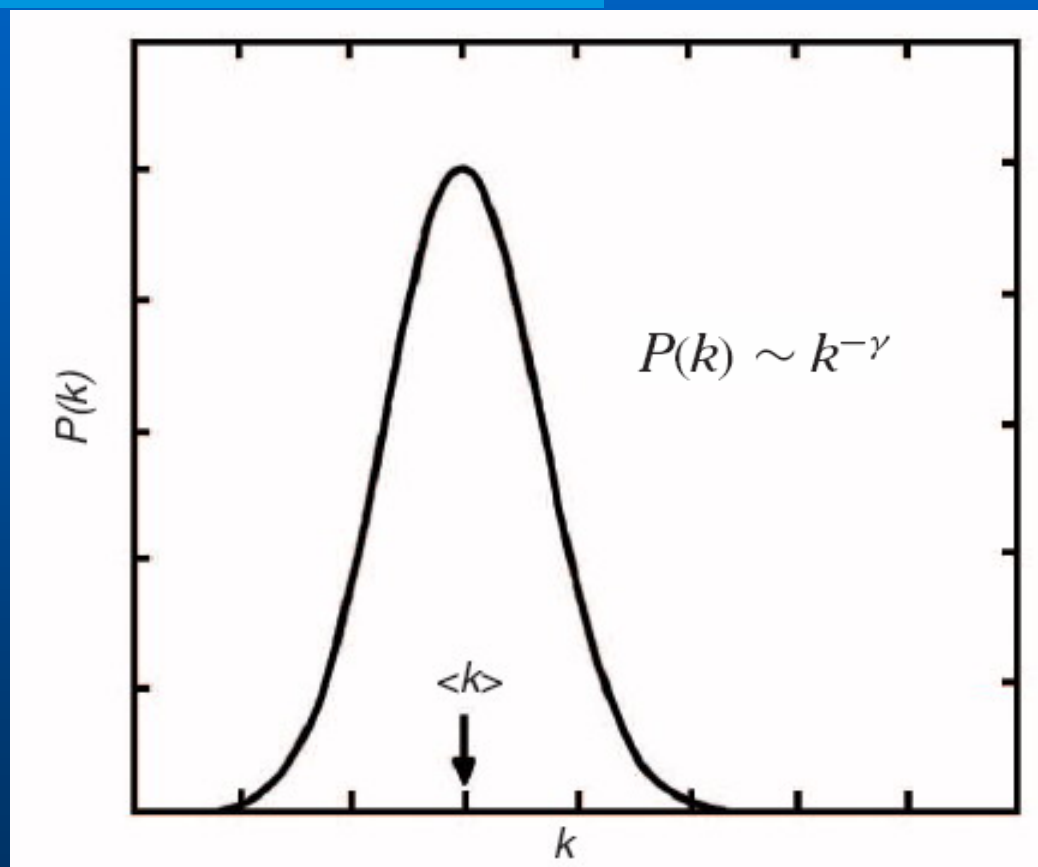
# 規則網路的階數分布



Delta Distribution



# 小世界網路的階數分布



Poisson Distribution



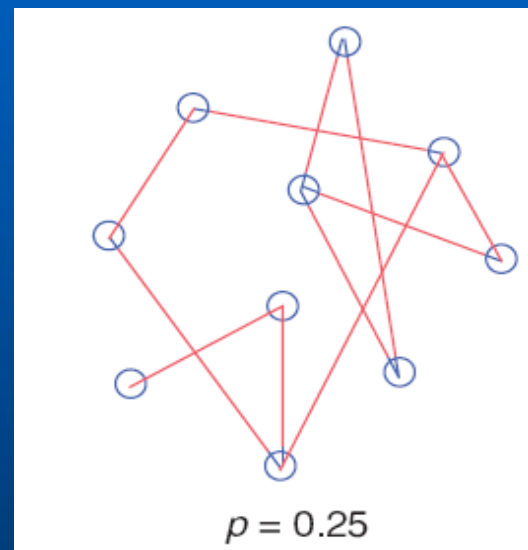
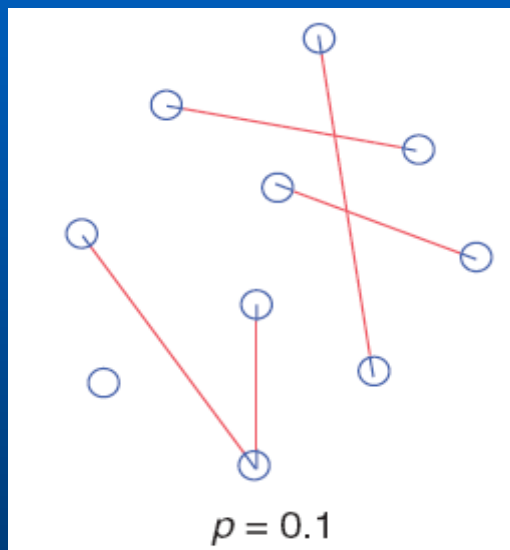
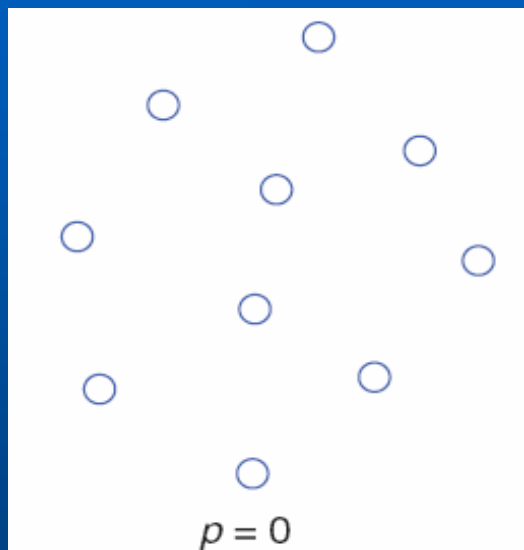
## 規則網路(完全連結)

- 最小的路徑長度
- 最大的叢聚係數





# 隨機網路



叢聚係數 $\ll 1$

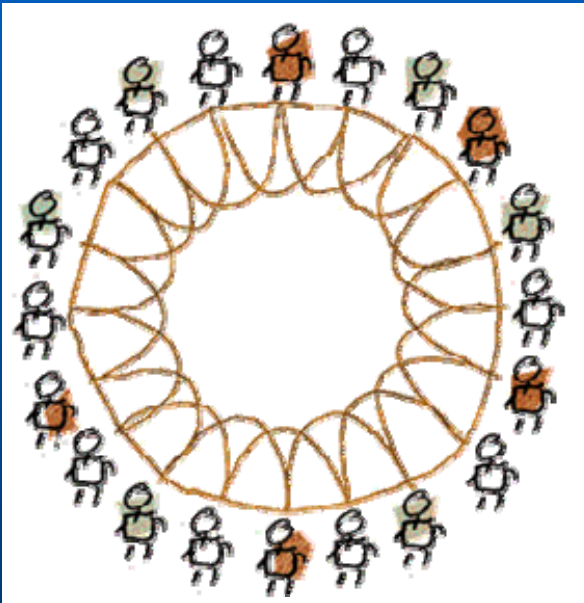


# Watts and Strogatz的小世界模型

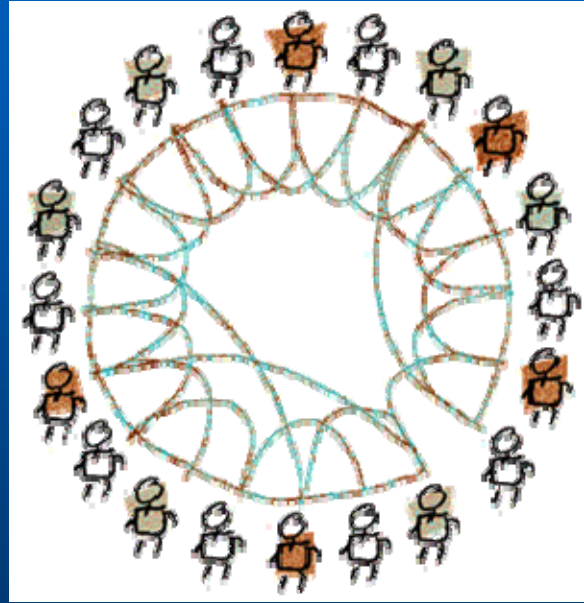
1. 產生 $N$ 個節點(排成環狀)；
2. 產生 $N$ 個節點之間的規律的 $K$ 個連結(edge)；
3. 以機率 $p$ 隨機的重連每一個 edge；
4. 變化 $p$ 使其在規則 ( $p = 0$ ) 和隨機網路( $p = 1$ ) 之間變化



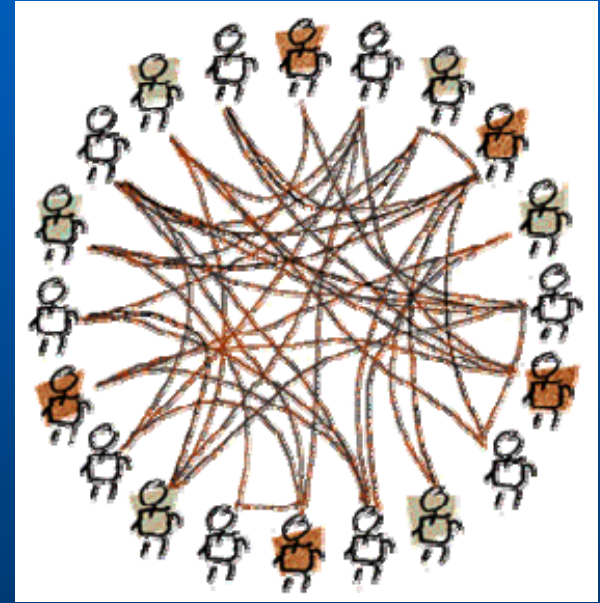
# Watts and Strogatz(1998)模型



Regular



Small World



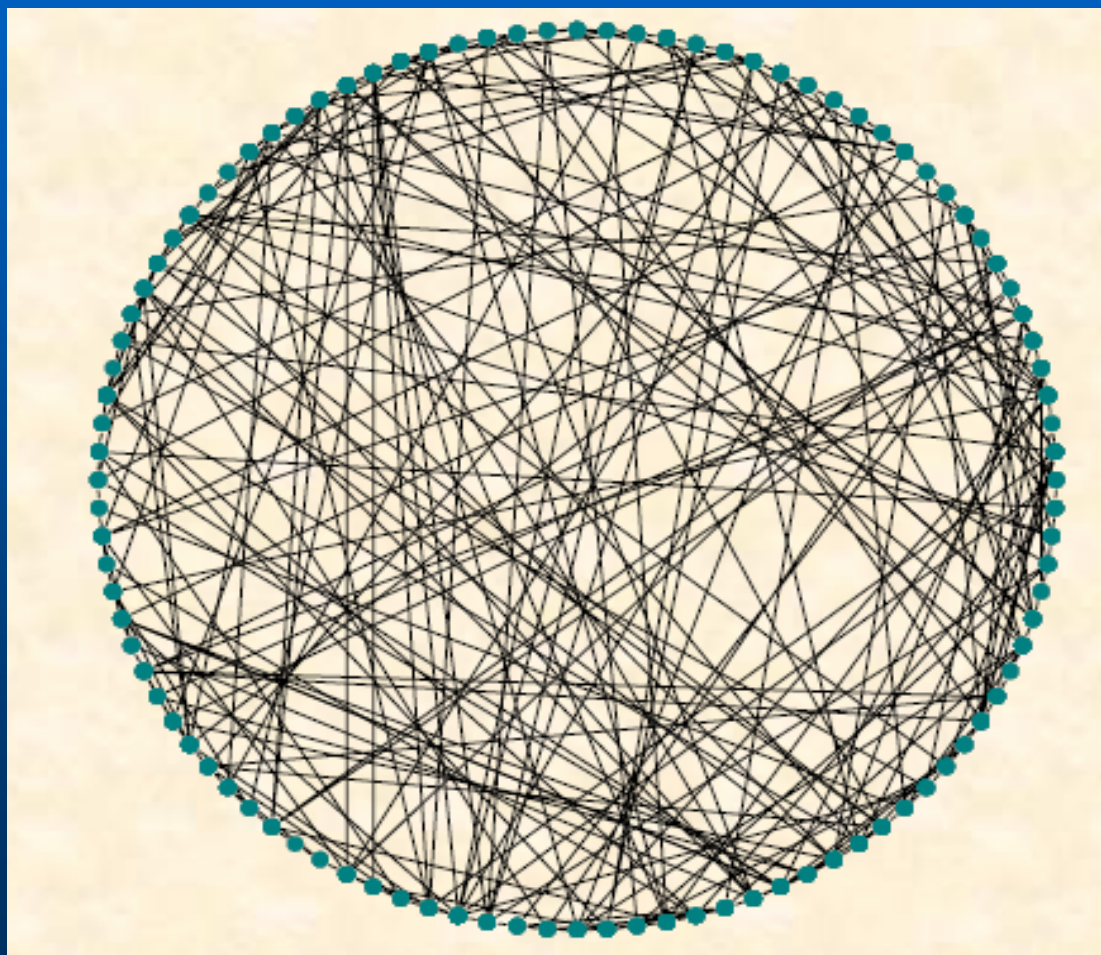
Random



# Watts and Strogatz(1998)模型

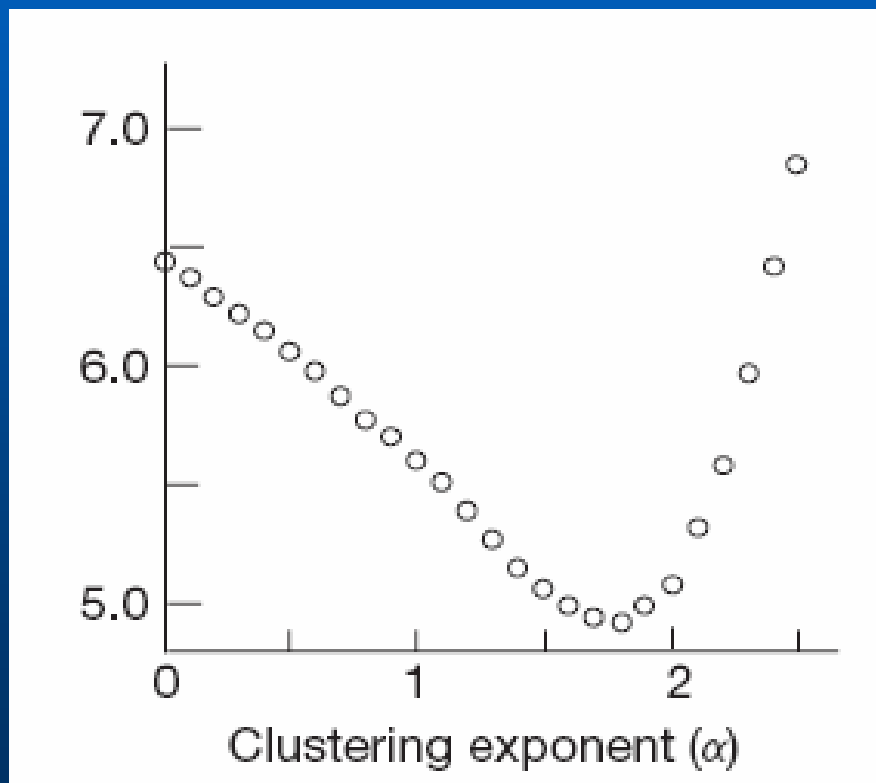
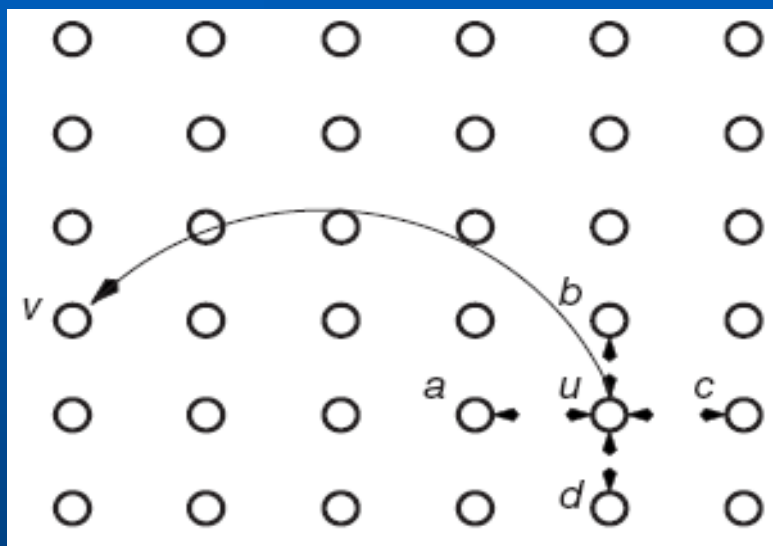
$N=100$

$K=2$





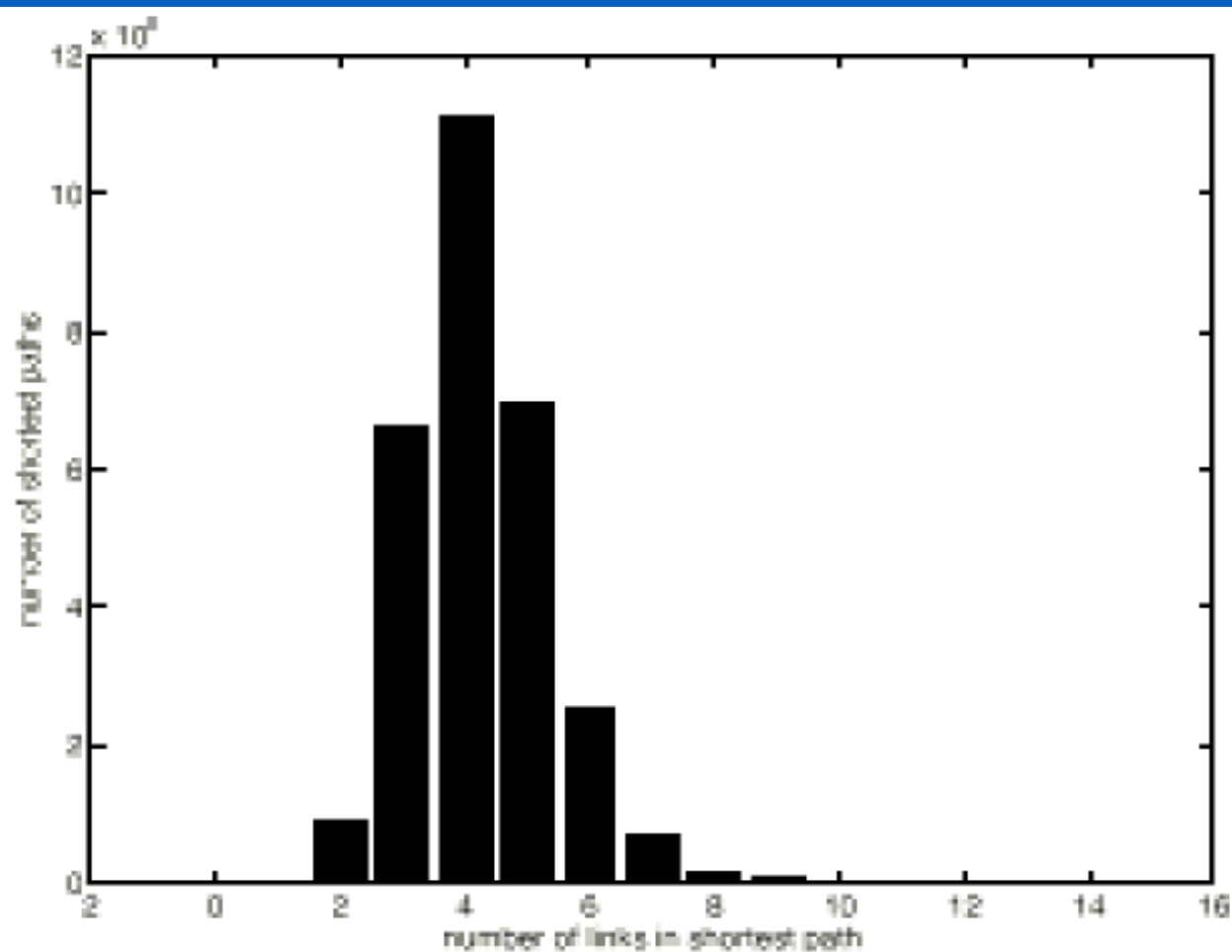
# Watts and Strogatz(1998)模型





# Web小世界

- 65,000網站
- 平均路徑長：4.2
- 最長：10





# 小世界的系統思想



# 系統的網路特性

複雜網路中極少量的隨機重新接線  
(random rewiring) 與下列作用相同：

- 大量的重新接線
- 大量的非隨機連結





## 微小的、隨機性的干擾

規律網路到複雜網路(小世界網路)僅需要微小的、隨機性的干擾即可達成。

意即：

複雜網路對於微小的改變極為敏感。



# 高效率的資訊交換

小世界網路的資訊交換不論區域性或全域性均具有高度的效率。



## 觀察複雜系統的小世界現象

- 其元素鏈結網路形態是稀疏(sparse)，亦即每一個節點僅有少數連結edge。
- 任意兩個節點的距離遠小於網路的規模( $\sim$ 節點數的對數)
- 網路具有叢聚性，意指節點鄰域節點也傾向於彼此相連。



# 工程應用

- 網頁搜尋
- 多代理人系統
- 分散式計算
- 通信系統設計
- 大型組織的合作行為
- 電腦病毒散布
- 軟體更新



## 其他領域應用

- 公共意見的發生、傳遞和改變
- 傳染病的散佈
- 網路社群的形成
- 產品行銷
- 組織內團隊管理與部門合作



## 結語

- \* 小世界：介於完全的規律和完全隨機之間的網路結構
- \* 複雜網路中的一節點到其他任一節點，僅需相當少數的鏈結次數。
- \* 小世界結構的系統，具有非常高的傳輸效率。
- \* 小世界組織具有局部的叢聚性，適合發展凝聚性的行動。
- \* 分散化、強健的網路架構